16/4/2018

Μαθημα 6ο

Ολοκληρωτικές Ε.Ξ.

Ασκηση

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της

$$F(s) = \frac{3s}{(s^2+9)^2}$$

Λυση

$$F(s) = \frac{3s}{(s^2+9)^2} = \frac{3}{(s^2+9)} \cdot \frac{s}{s^2+9}$$

αναζητάμε τον

$$L^{-1}\left\{ \frac{3}{s^2+9} \cdot \frac{s}{s^2+9} \right\}$$

$2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

α' τροπος

Εστω $F_1(s) = \frac{3}{s^2+9}$, $F_2(s) = \frac{s}{s^2+9}$

Εχουμε

$$L^{-1}\left\{ \frac{3}{s^2+9} \right\} = \sin 3t \quad , \quad L^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+9} \right\} = \cos 3t$$

Οποτε

$f_1(t) = \sin 3t$, $f_2(t) = \cos 3t$ και

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) * g(t) = \int_0^t \sin 3t \cdot \cos 3t\,(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [\sin(3\tau+3(t-\tau)) + \sin(3\tau-3(t-\tau))]\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t (\sin(3t) + \sin(6\tau-3t))\,d\tau = \ldots$$

β' τροπος

$L\{t^{\nu} f(t)\} = (-1)^{\nu} \cdot \dfrac{\partial^{\nu} F(s)}{\partial s^{\nu}}$ το γνωρίζω αυτο

Οποτε εδοσαν

$$\frac{d}{ds}\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s^2+9}\right) = \frac{3s}{(s^2+9)^2}$$

Επεται οτι $f(t) = -\frac{1}{2}\sin 3t$

Αρα $L^{-1}\{F(s)\} = t\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 3t\right)$

Εφαρμογη μετασχηματισμου Laplace στην Επιλυση Δ.Ε

Παραδειγμα

Εστω οτι εχουμε το ακολουθο πρ.Α.Τ

$x'(t) + p\cdot x(t) = f(t)$, $t>0$, $x(0) = a$

οπου p και a ειναι σταθεροι αριθμοι και για τη συναρτηση $f(t)$ υπαρχει ο μετασχηματισμος Laplace

απαντηση

Γνωριζουμε οτι ισχυει $L\{g'(t)\} = s\,L\{g(t)\} - g(0)$

Εστω οτι $L\{f(t)\} = F(s)$ και $L\{x(t)\} = X(s)$

Τοτε εχουμε $L\{x'(t) + p\,x(t)\} = L\{f(t)\}$ ή

$L\{x'(t)\} + p\,L\{x(t)\} = F(s)$ ή $s\,X(s) - a + p\,X(s) = F(s)$

ή $(s+p)\,X(s) = F(s)+a$ ή $X(s) = \dfrac{F(s)+a}{s+p}$ με $s+p>0$

Συνεπως

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{F(s)+a}{s+p}\right\} = L^{-1}\left\{F(s)\cdot\frac{1}{s+p}\right\} + a\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s+p}\right\} =$$

$$= f(t) * e^{-pt} + a\,e^{-pt} =$$

$$= \int_0^t e^{-p\tau} f(t-\tau)\,d\tau + a\,e^{-pt}$$

$L\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$, $s>a$

Θεώρημα

Θεωρούμε τη γραμμική διαφ. εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f \quad (1)$$

Εάν η f συνεχής στο $[0,+\infty)$ και εκθετικής τάξης. Τότε για κάθε λύση της Δ.Ε (1) y οι συναρτήσεις $y, y', \dots, y^{(n)}$ είναι εκθετικής τάξης και η συνάρτηση $y^{(n)}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η λύση της ΔΕ

$$y''(t) + 4y(t) = 8\sin t$$

και με συνθήκες $y(0)=0$, $y'(0)=2$

απάντηση

Έστω $L\{y(t)\} = Y(s)$ τότε $L\{y''(t)\} = s^2 L\{y(t)\} - \{s \cdot y(0) + y'(0)\} =$
$= s^2 Y(s) - 2$

Οπότε εφόσον $y''(t) + 4y(t) = 8\sin t$ έχουμε

$L\{y''(t)\} + 4 L\{y(t)\} = 8 L\{\sin t\} \Rightarrow$

$s^2 Y(s) - 2 + 4Y(s) = 8 \cdot \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow (s^2+4) Y(s) = 8 \frac{1}{s^2+1} + 2 \Rightarrow$

$Y(s) = 8 \cdot \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} + 2 \cdot \frac{1}{s^2+4} \Rightarrow Y(s) = \frac{10+2s^2}{(s^2+4)(s^2+1)}$

οπότε

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{10+2s^2}{(s^2+4)(s^2+1)}\right\}$$

Έστω

$$\frac{10+2s^2}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{\Gamma s + \Delta}{s^2+1}$$

Άρα

$$\frac{10+2s^2}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{(A+\Gamma)s^3+(B+\Delta)s^2+(B+4\Delta)s+\Gamma}{(s^2+4)(s^2+1)} \dots$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$\begin{cases} A=0 \\ \Delta = 8/3 \\ \Gamma = 0 \\ B = -2/3 \end{cases}$$

Άρα

$$\frac{10+2s^2}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{-2/3}{s^2+4} + \frac{8/3}{s^2+1}$$

Άρα

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10+2s^2}{(s^2+4)(s^2+1)}\right\} = -\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} + \frac{8}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{3}\sin 2t + \frac{8}{3}\sin t.$$

* Άσκηση ΣΠΙΤΙ *

Να βρεθεί η λύση της Δ.Ε

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 2$$

Που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0)=3$, $y'(0)=-2$, $y''(0)=3$

▸ Έστω ότι έχουμε το γενικότερο Π.Α.Τ με Δ.Ε. 2ης τάξης

$$x''(t) + 2p\,x'(t) + q\,x(t) = f(t) \quad (1)$$

συνθήκες: $x(0) = a$, $x'(0) = b$

όπου p, q, a, b σταθερές και f συνάρτηση για την οποία ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει, τότε:

Έστω $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ και $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

Τότε $\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2 X(s) - (s \cdot x(0) + x'(0)) =$

$= s^2 X(s) - a \cdot s - b$ $= s X(s) - a$

οπότε έδωσον

$$\mathcal{L}\{x''(t) + 2p\,x'(t) + q\,x(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

άρα τελικά

$$(s^2 + 2ps + q)X(s) = F(s) + sa + b + 2pa$$

Συνεπώς για $s: s^2 + 2ps + q \neq 0$ έχουμε

$$X(s) = \frac{F(s) + sa + b + 2pa}{s^2 + 2sp + q} \Rightarrow$$

$$X(s) = \frac{F(s) + sa + b + 2pa}{(s+p)^2 + q - p^2} \Rightarrow$$

$$X(s) = \frac{F(s)}{(s+p)^2 + q - p^2} + \frac{a(s+p)}{(s+p)^2 + q - p^2} + \frac{b + pa}{(s+p)^2 + q - p^2}$$

Διακρίνω περιπτώσεις:

- Εάν $n^2 = q - p^2 > 0$

Τότε

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{n} \cdot \frac{n}{(s+p)^2 + q - p^2}\right\} +$$

$$+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a(s+p)}{(s+p)^2 + q - p^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b + pa}{(s+p)^2 + q - p^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{n} f(t) * e^{-pt} \cdot \sin(nt) + a e^{-pt} \cos(nt) + \frac{b + pa}{n} \sin(nt)$$

• Εαν $q - \rho^2 = 0$

Τοτε:

$$x(t) = L^{-1}\left\{ \frac{F(s)}{(s+\rho)^2} \right\} + a \cdot L^{-1}\left\{ \frac{1}{s+\rho} \right\} + (b+\rho a)\, L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s+\rho)^2} \right\}$$

ομως

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad L\{e^{at} \cdot t\} = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

οποτε

$$x(t) = \int_0^t \tau e^{-\rho\tau} f(t-\tau)\, d\tau + a e^{-\rho t} + (b+\rho a)\, t e^{-\rho t}$$

• Εαν $q - \rho^2 < 0$

οποτε $m^2 = \rho^2 - q > 0$

αποδεικνυεται οτι

$$L\{\sinh t\} = \frac{1}{s^2 - 1}, \quad s > 1$$

$$L\{\cosh t\} = \frac{s}{s^2 - 1}$$

και

$$L\{\sinh kt\} = \frac{k}{s^2 - k^2}, \quad s > |k|$$

οποτε

$$x(t) = L^{-1}\left\{ \frac{1}{m} \cdot F(s) \frac{m}{(s+\rho)^2 - m^2} \right\} + a\, L^{-1}\left\{ \frac{s+\rho}{(s+\rho)^2 - m^2} \right\} +$$

$$+ \frac{b+\rho a}{m} L^{-1}\left\{ \frac{m}{(s+\rho)^2 - m^2} \right\} = \frac{1}{m} f(t) + (\tau^{-\rho t} \sinh mt) +$$

$$+ a e^{-\rho t} \cosh mt + \frac{b+\rho a}{m} \tau^{-\rho t} \sinh mt$$

Scanned by CamScanner

▸ Συναρτηση μοναδιαιου βηματος ή μοναδιαια συναρτηση Heanside

Η συναρτηση αυτη οριζεται ως εξης

$$H(t-a) = \begin{cases} 0, & t<a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

• Η συναρτηση μοναδιαιου βηματος μετατρεπει συναρτησεις με κλαδους σε συναρτηση με μοναδιαιο τυπο

π.χ

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t), & 0<t<a \\ g_2(t), & t \geq a \end{cases}$$

τοτε

$$g(t) = g_1(t) + (g_2(t) - g_1(t)) \cdot H(t-a)$$

• Μετασχηματισμος Laplace της συναρτησης μοναδιαιου βηματος

$$L\{H(t-a)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} H(t-a)\,dt =$$

$$= \int_0^{a} e^{-st} H(t-a)\,dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} H(t-a)\,dt =$$

$$\overset{t<a}{=} 0 + \int_a^{+\infty} e^{-st}\,dt = \lim_{k \to +\infty} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_a^k \right) = \frac{1}{s} e^{-sa}$$

Scanned by CamScanner

Ασκηση

Να γραψετε τη συναρτηση

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & , 0 < t < 3 \\ 0 & , t \geq 3 \end{cases}$$

με χρηση της συναρτησης μοναδιαιου βηματος (Hearside) και επειτα να υπολογισετε $\mathcal{L}\{f(t)\}$

Λυση

$f(t) = e^{-t} + [0 - e^{-t}] H(t-3)$

Γνωριζουμε το εξης

$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot g(t)\} = G(s-a)$ οποτε εχω

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}(1 - H(t-3))\} = F(s+1)$ οπου $F(s) = \mathcal{L}\{(1 - H(t-3))\}$

αλλα

$\mathcal{L}\{(1 - H(t-3))\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{H(t-3)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-3s}$

οποτε

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s+1}\left(1 - e^{-3(s+1)}\right)$$

Ασκηση

Να γραψετε τη συναρτηση

$$g(t) = \begin{cases} 0 & , t < 1 \\ t^2 - t & , 1 \leq t < 2 \\ 0 & , t \geq 2 \end{cases}$$

ως συναρτηση της συναρτησης μοναδιαιου βηματος

Λυση

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) & , t < 1 \\ g_2(t) & , 1 \leq t < 2 \\ g_3(t) & , t \geq 2 \end{cases}$$

Τοτε

$g(t) = g_1(t) + (g_2(t) - g_1(t))\, H(t-1) + (g_3(t) - g_2(t))\, H(t-2) =$

$= 0 + (t^2 - t - 0)\, H(t-1) + (0 - (t^2 - t))\, H(t-2) =$

$= (t^2 - t)\, H(t-1) - (t^2 - t)\, H(t-2)$

Θεωρημα

Εαν ο μετασχηματισμος Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ τοτε

$\mathcal{L}\{f(t-a) \cdot H(t-a)\} = e^{-as}\, F(s)$

αποδειξη

$\mathcal{L}\{f(t-a)\, H(t-a)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t-a)\, H(t-a)\, dt =$

$= \int_0^{a} e^{-st} f(t-a)\, H(t-a)\, dt + \int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a)\, H(t-a)\, dt =$

$= \int_a^{+\infty} e^{-st} f(t-a)\, dt \quad (*)$

Θετουμε $w = t - a$

$dw = dt$

Επισης για $t = a$: $w = 0$

$t = \kappa$: $w = \kappa - a$

Αρα απο $(*)$

$\mathcal{L}\{f(t-a)\, H(t-a)\} = \lim_{\kappa \to +\infty} \int_0^{\kappa - a} f(w)\, e^{-s(w+a)}\, dw =$

$= e^{-sa} \lim_{\kappa \to +\infty} \int_0^{\kappa - a} f(w)\, e^{-sw}\, dw = e^{-sa}\, F(s)$

Ασκηση

Να βρειτε το μετασχηματισμο Laplace της

$g(t) = (t^2 - t)\, H(t-1)$

Λυση

Θα χρησιμοποιησω το προηγουμενο θεωρημα

οπου $f(t-1) = t^2 - t$

Θετω $p = t-1 \Rightarrow t = p+1$

οποτε $f(p) = (p+1)^2 - (p+1) = p^2 + p$

Αρα $f(t) = t^2 + t$

Ομως

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1!}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

Συνεπως

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t-1)\, H(t-1)\} = e^{-s} \cdot \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right)$$

Ασκηση

Δινεται η Δ.Ε $y''(t) + y(t) = \begin{cases} 4, & 0 < t < 2 \\ (t+2), & t \geq 2 \end{cases}$

με $y(0) = 0$ και $y'(0) = 0$

Να λυσετε το Π.Α.Τ με χρηση μετασχηματισμου Laplace και να εκφρασετε τη λυση με τη βοηθεια της συναρτησης μοναδιαιου βηματος (Heaviside)

Λυση

$$f(t) = \begin{cases} 4, & 0 < t < 2 \\ t+2, & t \geq 2 \end{cases}$$

$f(t) = 4 + (t+2-4)\,H(t-2) = 4 + (t-2)\,H(t-2)$

οποτε εχουμε τη Δ.Ε

$y''(t) + y(t) = f(t)$

Αρα

$\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$ (*)

αλλά

$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{y(t)\} - \{s\,y(0) + y'(0)\} = s^2 Y(s)$

οπου $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

οποτε απο την (*)

$s^2 Y(s) + Y(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

αλλά

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{4 + (t-2)\,H(t-2)\} = \mathcal{L}\{4\} + \mathcal{L}\{(t-2)\,H(t-2)\} =$

$= \frac{4}{s} + \mathcal{L}\{(t-2)\,H(t-2)\}$ (**)

$g(t-2) = t-2$ αρα $g(t) = t$

Αρα

$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s^2}$

οποτε

$\mathcal{L}\{(t-2)\,H(t-2)\} = e^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2}$

Αρα απο την σχεση (*)

$(s^2+1)\,Y(s) = e^{-2s}\,\frac{1}{s^2} + \frac{4}{s}$

και $Y(s) = e^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{4}{s(s^2+1)}$

αρα

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\,\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s(s^2+1)}\right\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ f_1(t-2), & t \geq 2 \end{cases}$$

ομως

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)s^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2}\right\} =$$

$$= \sin t * t = \int_0^t \sin\tau\,(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t t\sin\tau\,d\tau - \int_0^t \tau\sin\tau\,d\tau = t - \sin t$$

Επισης

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\} =$$

$$= g_1(t) * g_2(t)$$

οπου $g_1(t) = 4$ και $g_2(t) = \sin t$

και $g_1(t) * g_2(t) = \int_0^t \sin\tau \cdot 4\,d\tau = 4(1-\cos t)$

Αρα

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2) - \sin(t-2), & t \geq 2 \end{cases} + 4(1-\cos t) =$$

$$= \left((t-2) - \sin(t-2)\right) H(t-2) + 4(1-\cos t)$$